

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
теории функций и геометрии

 / Семенов Е.М./

11.04.2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.05 Волновое уравнение на графе

- 1. Код и наименование направления специальности:** 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.
- 2. Специализация:** Современные методы теории функций в математике и механике.
- 3. Квалификация (степень) выпускника:** Математик. Механик. Преподаватель.
- 4. Форма обучения:** очная.
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** кафедра теории функций и геометрии.
- 6. Составитель программы:**
Прядиев В. Л. – доцент, кандидат физ.-мат. наук.
- 7. Рекомендована:** НМС Математического ф-та
протокол № 0500-03 от 24.03.2022 г.
- 8. Учебный год:** 2024/2025. **Семестр:** 5.

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели дисциплины:

- ознакомление студентов с задачами естествознания, которые моделируются дифференциальными уравнениями на графах;
- освоение студентами дополнительных, углублённых знаний в теории дифференциальных уравнений с частными производными;
- ознакомление студентов с элементами теории графов;
- дальнейшее формирование у студентов понимания взаимосвязей между различными разделами математики, а также понимания роли математики, как инструмента исследования насущных задач естествознания.

Задачи дисциплины:

- овладение студентами техникой моделирования некоторых задач естествознания, приводящих к дифференциальным уравнениям на графах;
- овладение студентами основными понятиями теории дифференциальных уравнений на графах;
- освоение студентами основных подходов и методов исследования в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на графах;
- освоение студентами основных подходов и методов исследования в теории волнового уравнения на графах;
- ознакомление студентов с историей теории дифференциальных уравнений на графах.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Спецкурс «Волновое уравнение на графе» является дисциплиной по выбору математического цикла дисциплин Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 01.05.01 Фундаментальные математика и механика (специалитет).

Курс базируется на знаниях, полученных в рамках дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки является основой для проведения научных исследований в области дифференциальных уравнений на графах, в том числе при работе над курсовыми работами и дипломными проектами.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Обладает базовыми знаниями в теории дифференциальных уравнений на графах.
ПК-2.1	Знает современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций	Знает современные методы моделирования явлений и разработки задач на одномерных ветвящихся многообразиях с использованием теории функций.
ПК-2.2	Умеет разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования	Умеет разрабатывать математические модели явлений в области естествознания, экономики и управления, приводящих к дифференциальным уравнениям на графах.
ПК-3.1	Знает современные методы разработки и реализации математических моделей	Знает современные методы разработки и реализации математических моделей явлений, приводящих к дифференциальным уравнениям на графах.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 3/108.

Форма промежуточной аттестации: экзамен.

13. Виды учебной работы.

Вид учебной работы	Трудоёмкость			
	Всего	По семестрам		
		5 семестр		
Аудиторные занятия	50	50		
в том числе: лекции	16	16		
практические занятия	34	34		
Самостоятельная работа	22	22		
Контроль	36	36		
Итого:	108	108		

13.1. Содержание дисциплины.

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1	Элементы теории графов	Граф, геометрический граф; вершина и ребро геометрического графа; степень вершины, цикломатическое число графа.
2	Дифференциальные уравнения на графах как модели задач естествознания	Задача о деформации упругой сетки; задача о деформации стержневой решётки; задача о колебаниях в электрической сети; задача о распространении тепла в стержневой решётке.
3	Пространства функций, определённых на геометрических графах	Нормированные пространства функций, непрерывных на геометрических графах, и функций, непрерывно дифференцируемых на геометрических графах.
4	Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на геометрическом графе	Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на геометрическом графе; множество граничных вершин геометрического графа; краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на геометрическом графе; критерий однозначной разрешимости краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на геометрическом графе.
5	Метод разделения переменных для волнового уравнения на геометрическом графе	Метод разделения переменных для волнового уравнения на геометрическом графе; суперпозиция стоячих волн для волнового уравнения на геометрическом графе.
6	Спектральная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на геометрическом графе	Спектральная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на геометрическом графе; собственные значения и собственные функции для волнового уравнения на геометрическом графе; дифференцируемость рядов Фурье по собственным функциям волнового уравнения на геометрическом графе.
7	Метод граничных режимов для волнового уравнения на геометрическом графе	распространение граничных режимов для волнового уравнения на отрезке; уравнение для набора решений волнового уравнения в вершинах геометрического графа.
8	Возникновение и развитие теории дифференциальных уравнений на графах и ветвящихся пространствах	Первые работы по дифференциальным уравнениям на графе в отечественных и зарубежных математических школах. Формирование подходов, создание методов и развитие теории дифференциальных уравнений на ветвящихся пространствах в научных школах Воронежа, Ленинграда, во Франции, Германии, Италии с середины 90-х годов XX века.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий.

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
01	Элементы теории графов	1	2	-	2	5

02	Дифференциальные уравнения на графах как модели задач естествознания	2	-	-	2	4
03	Пространства функций, определённых на геометрических графах	1	-	-	2	3
04	Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на геометрическом графе	2	8	-	4	14
05	Метод разделения переменных для волнового уравнения на геометрическом графе	2	8	-	2	12
06	Спектральная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на геометрическом графе	4	8	-	2	14
07	Метод граничных режимов для волнового уравнения на геометрическом графе	2	8	-	4	14
08	Возникновение и развитие теории дифференциальных уравнений на графах и ветвящихся пространствах	2	-	-	4	6
Итого		16	34	-	22	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Работа с конспектами лекций, выполнение практических заданий, тестов, заданий, работа с литературой.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	<i>Покорный Ю. В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах/ Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. - М: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 268 с.</i>
2	<i>Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. - 332 с.</i>
3	<i>Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980, 336 с.</i>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
4	<i>Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М.: Наука, 1985. - 255 с.</i>
5	<i>Левитан Б.М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.</i>
6	<i>Покорный Ю. В., Прядиев В. Л. Некоторые вопросы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственной сети// Успехи матем. наук. - 2004. - Т. 59, вып. 3 (357). – С. 115-150</i>
7	<i>Покорный Ю. В., Прядиев В. Л., Боровских А. В. Волновое уравнение на пространственной сети// Докл. РАН. – 2003. – Т. 388, № 1. – С. 16-18</i>
8	<i>Покорный Ю. В., Покорная И. Ю., Прядиев В. Л., Рябцева Н. Н. Некоторые вариационные неравенства на пространственных сетях// Вест. Воро-</i>

	<i>неж. гос. ун-та. Сер. "Физика. Математика". – 2004. - № 2. – С. 179-183</i>
9	<i>Глотов Н. В., Прядиев В. Л. Описание решений волнового уравнения на конечном и ограниченном геометрическом графе при условиях трансмиссии типа "жидкого трения"// Вест. Воронеж. гос. ун-та. Сер. "Физика. Математика". – 2006. - № 2. – С. 185-193</i>
10	<i>О. В. Коровина, В. Л. Прядиев <u>Структура решения смешанной задачи для волнового уравнения на компактном геометрическом графе в случае ненулевой начальной скорости</u>// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 9:3 (2009), 37–46</i>

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

№ п/п	Источник
11	http://www.math.vsu.ru – официальный сайт математического факультета ВГУ
12	http://www.math.msu.ru – официальный сайт мехмата МГУ
13	http://www.mathnet.ru/rus/person9127
14	http://www.mathnet.ru/rus/person18392
15	http://www.mathnet.ru/rus/person14452

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1	<i>Покорный Ю. В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах/ Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. - М: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 268 с.</i>
2	<i>Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980, 336 с.</i>
3	<i>Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М.: Наука, 1985. - 255 с.</i>
4	<i>Левитан Б.М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.</i>
5	<i>Прядиев В. Л. Программа по спецкурсу "Осцилляционная теория дифференциальных уравнений на графах". – Воронеж: Изд-во Воронежского гос-университета, 1997. – 4 с.</i>

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: доска, мел, фломастер, тряпка.

19. Фонд оценочных средств:

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения.

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)

ПКВ-1.1			
	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Разделы 01 - 07	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР) Экзамен
ПКВ-2.1	Знает современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций	Разделы 03 - 07	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР) Экзамен
ПКВ-2.2	Умеет разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования	Раздел 07	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР) Экзамен
ПКВ-3.1	Знает современные методы разработки и реализации математических моделей	Разделы 01 - 08	Устный опрос (УО) Контрольная работа (КР) Экзамен

19.2. Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели (ЗУ-Ны из 19.1):

(как пример):

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом теории дифференциальных уравнений на графе;
 - 2) умение связывать теорию с практикой;
 - 3) умение иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований;
 - 4) умение применять формулы, решать задачи;
- владение понятийным аппаратом данной области теории дифференциальных уравнений на графе (теоретическими основами дисциплины), способность иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным критериям. Продемонстрировано знание теории дифференциальных уравнений на графе, умение решать задачи ИЛИ Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной теории дифференциальных уравнений на графе, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач в области теории дифференциальных уравнений на графе</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
<i>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы. Недостаточно продемонстрировано знание, или содержатся отдельные пробелы знания теории дифференциальных уравнений на графе ИЛИ Обучающийся владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен решать задачи., допускает ошибки при ответе.</i>	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>

<p>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Демонстрирует частичные знания, или имеет не полное представление понятий теории дифференциальных уравнений на графе, допускает существенные ошибки в решении задач ИЛИ</p> <p>Обучающийся владеет частично теоретическими основами дисциплины, фрагментарно способен отвечать на вопросы., не умеет применять знания</p>	<p>Пороговый уровень</p>	<p>Удовлетворительно</p>
<p>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки</p>	<p>–</p>	<p>Неудовлетворительно</p>

19.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1. Перечень вопросов к экзамену.

1. История возникновения теории дифференциальных уравнений на графах.
2. Основные понятия и обозначения дифференциальных уравнений на графах.
3. Математическая модель малой деформации упругой сетки из струн.
4. Аналог теоремы Штурма о перемежаемости нулей.
5. Аналог теоремы Штурма о сравнении: неприменимость классических схем доказательств.
6. Свойства дифференциальных неравенств на графах.
7. Доказательство аналога теоремы Штурма о сравнении.
8. Приложение теорем Штурма к исследованию спектральной задачи.
9. Неосциллирующие дифференциальные уравнения 2-го порядка и невырожденные краевые задачи на графах.
10. Достаточное условие неосцилляции дифференциального уравнения 2-го порядка на графе.
11. Функция Грина краевой задачи 2-го порядка на графе и ее свойства.
12. u_0 -положительность интегрального оператора, обращающего краевую задачу на графе.
13. Приложение u_0 -положительности оператора к исследованию спектральной задачи.
14. Геометрическая кратность собственных значений на графе-пучке.
15. Геометрическая кратность собственных значений на произвольном графе.
16. Метод разделения переменных для волнового уравнения на геометрическом графе.
17. Спектральная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на геометрическом графе.
18. Правило параллелограмма для волнового уравнения на графе.
19. Численное решение начально-краевой задачи для волнового уравнения на графе, основанное на правиле параллелограмма.
19. Метод граничных режимов для волнового уравнения на геометрическом графе.

19.3.2. Перечень практических заданий.

1. Существует ли нетривиальное решение уравнения $-u'' + e^{|x|}u = 0$ ($x \in \Gamma$), где Γ – геометрический связный граф, удовлетворяющее условию $u|_{\partial\Gamma} = 0$? Ответ обоснуйте.
2. Верно ли, что ни одно из решений уравнения $u'' - 3u = 0$ ($x \in \Gamma$), где Γ – геометрический связный граф, не имеет S-зон в Γ ? Ответ обоснуйте.
3. Известно, что граф Γ имеет три ребра и одну внутреннюю вершину, а также, что при $\lambda = 1$ Γ является S-зоной некоторого решения уравнения $u'' + \lambda u = 0$ ($x \in \Gamma$). Какое наибольшее количество нулей в Γ может иметь нетривиальное решение этого уравнения при $\lambda = \frac{1}{2}$? Ответ обоснуйте.

4. Пусть Γ – граф с граничными вершинами b_1, b_2, b_3 и внутренней вершиной a , причём $|b_i - a| = 1$ ($i = 1, 2, 3$). Найдите решение уравнения $u'' = 0$ ($x \in \Gamma$), удовлетворяющее условиям $u(b_1) = 0 = u(b_2)$, $u'(b_1) = 1$, если $\alpha_i(a) = 1$ ($i = 1, 2, 3$) (i – индекс ребра $(b_i; a)$).

5. Пусть Γ – граф, $\gamma_i = (b_i; a)$ ($i = 1, 2, 3$) – его рёбра длины $\frac{\pi}{2}$. Найдите решение w уравнения $u'' + u = 0$ ($x \in \Gamma$), удовлетворяющее условиям $u(b_1) = 0 = u(b_2)$, $u'(b_1) = 1$. Имеет ли w S-зоны? Будут ли иметь S-зоны в Γ решения данного уравнения, неколлинеарные с w ? Ответы обоснуйте.

6. Пусть Γ – граф, $\gamma_i = (b_i; a)$ ($i = 1, 2, 3$) – его рёбра длины 1. Будут ли иметь S-зоны в Γ решения уравнения $-u'' + u = 0$ ($x \in \Gamma$)? Ответ обоснуйте.

7. Пусть Γ – граф, $\gamma_i = (b_i; a)$ ($i = 1, 2, 3$) – его рёбра длины $\frac{\pi}{4}$. Найдите решение уравнения $u'' + 4u = 0$ ($x \in \Gamma$), удовлетворяющее условиям $u(b_1) = 0 = u(b_2)$, $u'(b_1) = 1$. Будет ли иметь

S-зоны в Γ решение уравнения $u'' + 5u = 0$ ($x \in \Gamma$), удовлетворяющее тем же условиям в точках b_1 и b_2 ?

8. В спектральной задаче типа Дирихле для уравнения $u'' + \lambda u = 0$ на графе-звезде с тремя рёбрами, длины которых 1, 1 и 2, найдите формулу и постройте график ведущей собственной функции.

19.3.3. Тестовые задания не предусматриваются.

19.3.4. Перечень заданий для контрольных работ.

1. В спектральной задаче типа Дирихле для уравнения $u'' + \lambda u = 0$ на графе-звезде с тремя рёбрами, длины которых 1, 1 и 2, найдите формулу и постройте график ведущей собственной функции.

2. В спектральной задаче типа Дирихле для уравнения $u'' + \lambda u = 0$ на графе-звезде с тремя рёбрами, длины которых 1, 2 и 2, найдите формулу и постройте график ведущей собственной функции.

3. В спектральной задаче типа Неймана для уравнения $u'' + \lambda u = 0$ на графе-звезде с тремя рёбрами, длины которых 1, 1 и 2, найдите формулу и постройте график первой (после ведущей) собственной функции.

4. В спектральной задаче типа Неймана для уравнения $u'' + \lambda u = 0$ на графе-звезде с тремя рёбрами, длины которых 1, 2 и 2, найдите формулу и постройте график первой (после ведущей) собственной функции.

5. В спектральной задаче типа Дирихле для уравнения $u'' + \lambda u = 0$ на графе-звезде с тремя рёбрами, длины которых 1, 1 и 2, найдите формулу и постройте график первой (после ведущей) собственной функции.

6. В спектральной задаче типа Дирихле для уравнения $u'' + \lambda u = 0$ на графе-звезде с тремя рёбрами, длины которых 1, 2 и 2, найдите формулу и постройте график первой (после ведущей) собственной функции.

7. В спектральной задаче типа Дирихле для уравнения $u'' + \lambda u = 0$ на графе-звезде с тремя рёбрами, длины которых 1, 1 и 2, опишите множество всех собственных значений.

8. В спектральной задаче типа Дирихле для уравнения $u'' + \lambda u = 0$ на графе-звезде с тремя рёбрами, длины которых 1, 2 и 2, опишите множество всех собственных значений.

9. В спектральной задаче типа Неймана для уравнения $u'' + \lambda u = 0$ на графе-звезде с тремя рёбрами, длины которых 1, 1 и 2, опишите множество всех собственных значений.

10. В спектральной задаче типа Неймана для уравнения $u'' + \lambda u = 0$ на графе-звезде с тремя рёбрами, длины которых 1, 2 и 2, опишите множество всех собственных значений.

19.3.5. Темы курсовых работ.

- 1) Определение собственных частот колебаний упругих сеток при различных условиях трансмиссии.
- 2) Определение профилей колеблющихся упругих сеток методом граничных режимов.
- 3) Определение профилей колеблющихся упругих сеток через применение формулы Даламбера.
- 4) Определение профилей колеблющихся упругих сеток с помощью правила параллелограмма.

19.3.6. Темы рефератов не предусматриваются.

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в форме *устного опроса (индивидуальный опрос)*. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и/или практическое(ие) задание(я), позволяющее(ие) оценить степень сформированности умений и(или) навыков, и(или) опыт деятельности (*указываете реальную структуру*).

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.